MULTIDISCIPLINARY & HEALTH EDUCATION JOURNAL, Vol. 6. No. 1, 2024, Pages 830-838.
http://journalmhe.org

ARTICULO ORIGINAL / ORIGINAL ARTICLE

Ventajas del uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas: puente browniano y movimiento browniano geométrico

Advantages of using stochastic differential equations: Brownian bridge and geometric Brownian motion

Jhonier Rangel*

Universidad ECCI, Sede Bogotá, Facultad de Ingeniería, Programa de estadística, Carrera 19 Calle 49, Bogotá, Código Postal 1113, Colombia.

Article history:
Received December 14, 2023
Received in revised from December 19, 2023
Accepted November 19, 2023
Available online February 10, 2024

* *Corresponding author:*
Jhonier Rangel
Electronic mail address: jrangelg@unal.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6849-5551

Author history:
Este trabajo representa la aportación original de Angelica Janeth Rangel Lopéz, especialista en ciencias naturales, exactas y de la salud, quien forma parte del cuerpo estudiante del Diplomado en Salud Pública y Epidemiología del Instituto de Altos Estudios de Ciencias de la Salud de la Fundación Social Educativa y Cultural del Claustro Gómez.

R E S U M E N

Este artículo expone varias ventajas del uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) en comparación con las ecuaciones diferenciales clásicas. En particular, se aborda la diferencia entre el modelo de crecimiento exponencial representado como una ecuación diferencial clásica y su contraparte estocástica, conocida como el movimiento browniano geométrico. Además, se analiza el puente browniano en contraposición a una línea recta; este último modelo se utiliza en contextos ecológicos para simular trayectorias migratorias tal como se ve en Kranstauber. B.,*et al.* 2012. El artículo comienza con una explicación de los resultados más relevantes del análisis estocástico, lo cual es fundamental para desarrollar un modelo basado en una EDE. Posteriormente, se procede a explicar la simulación de estas ecuaciones diferenciales estocásticas mediante el método de Euler-Maruyama y el método de Runge-Kutta estocástico. Estas simulaciones resultan fundamentales para generar curvas de confianza asociadas a la función promedio.

Palabras claves: Ecuación diferencial, estocástica, simulación, confianza, solución

A B S T R A C T

This article exposes several advantages of using stochastic differential equations (SDE) compared to classical differential equations. It addresses the difference between the exponential growth model represented as a classical differential equation and its stochastic counterpart, known as geometric Brownian motion. Additionally, it analyzes the Brownian bridge as opposed to a straight line; the latter model is used in ecological contexts to simulate migratory trajectories as seen in Kranstauber, B., *et al.* (2012). The article begins with an explanation of the most relevant results from stochastic analysis, which is essential for developing a model based on an SDE. Subsequently, it proceeds to explain the simulation of these stochastic differential equations using the Euler-Maruyama method and the stochastic Runge-Kutta method. These simulations are crucial for generating confidence curves associated with the average function.

Keywords: Differential equation, Stochastic, Simulation, Confidence, Solution

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) desempeñan un papel fundamental en diversos campos científicos y aplicaciones prácticas. Su importancia radica en su capacidad para modelar y comprender sistemas complejos sujetos a la incertidumbre y variabilidad inherentes a fenómenos naturales o comportamientos aleatorios. A diferencia de las ecuaciones diferenciales clásicas (EDC) que asumen condiciones perfectamente deterministas, las EDE consideran la aleatoriedad, permitiendo así capturar y analizar la variabilidad observada en muchos procesos del mundo real. Este enfoque es crucial en campos como la física, la biología, la economía y la ingeniería financiera, donde los fenómenos involucrados están influenciados por factores aleatorios o fluctuaciones que deben ser comprendidos y modelados con precisión. Las EDE proporcionan herramientas poderosas para simular, predecir y tomar decisiones en sistemas complejos y dinámicos, ofreciendo una visión más realista y completa de los fenómenos que las rodean.

Según Exarchos, I., *et al.* (2018), las ecuaciones diferenciales estocásticas y la simulación son de gran importancia para resolver problemas de control óptimo estocástico. Estas ecuaciones permiten modelar y analizar sistemas dinámicos sujetos a incertidumbre y ruido. Dichas ecuaciones diferenciales han sido objeto de gran estudio en el área de la teoría de procesos estocásticos. Los últimos avances teóricos han intentado llevar las propiedades que tienen las ecuaciones diferenciales clásicas a las EDE.

La simulación de estas ecuaciones es otra parte interesante que se discutirá en este artículo. En particular, se expondrán e implementarán los métodos de Euler-Maruyama y de Runge-Kutta. Estos métodos generarán trayectorias de estado y evaluarán expectativas numéricamente. Estas herramientas son fundamentales para abordar problemas de control óptimo estocástico de manera eficiente y escalable, y han demostrado ser útiles en diversos campos, como finanzas, robótica y control de procesos. Según Suescun D, et al. (2021), el método de Runge-Kutta clásico se puede generalizar para las EDE de manera muy similar a como se generaliza el método de Euler-Maruyama con el método de Euler para las EDC.

Hay problemas en los cuales las EDC se adaptan muy bien. Sin embargo, estas ecuaciones no consideran el ruido de las observaciones al modelo. Por ejemplo, un experimento que se realiza en cursos básicos de física experimental es dejar caer una pelota y ajustarle el modelo del movimiento uniformemente acelerado. En la teoría, se ajusta un modelo completamente caracterizado por la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración constante, siguiendo la ley que indica que una parábola solo pasa por tres puntos. Los puntos observados de la posición de la pelota en diferentes tiempos fluctúan alrededor del modelo teórico; este error se puede modelar mediante un modelo estocástico. Además, en situaciones que involucren modelos basados en EDC, puede ocurrir que por efectos ambientales o azarosos la realidad fluctúe alrededor del modelo. En estos casos, es recomendable considerar un modelo de EDE que sí considera dicho ruido.

METODOLOGÍA

Para un entendimiento profundo del trabajo con EDE se debe realizar un resumen acerca de los resultados más importantes del análisis estocástico, este resumen se barará en Castañeda, L. B., *et al.* 2012 y Rincón, L., 2006

El modelo matemático fundamental en la teoría de la probabilidad es el espacio de probabilidad, que se compone de un conjunto Ω, una colección A de subconjuntos de Ω, y una función P: $A \rightarrow [0, 1]$. El conjunto Ω representa los posibles resultados de un experimento aleatorio, mientras que A, llamada σ-álgebra, está constituida por subconjuntos de Ω que cumplen ciertas propiedades de cierre bajo operaciones específicas. Los elementos de Ase denominan eventos o conjuntos medibles. La función P, conocida como medida de probabilidad, cumple con axiomas establecidos por A. Kolmogorov en 1933, los cuales indican que la probabilidad de **Ω** es igual a 1, la probabilidad de cualquier evento en F es mayor o igual a cero, y la función es aditiva sobre sucesiones infinitas de eventos disjuntos dos a dos.

La función de densidad de probabilidad de una distribución normal, representada por

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} dt,$$

describe la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor menor o igual a x, dados ciertos parámetros como la media y la desviación estándar. Esta fórmula es fundamental en estadística y teoría de probabilidades, ya que modela con precisión una variedad de fenómenos naturales y en aplicaciones prácticas, ofreciendo una representación gráfica de la distribución de probabilidad que sigue una curva simétrica en forma de campana, conocida como la curva de campana gaussiana.

En la teoría de la probabilidad, se emplea una definición de integral más amplia que la integral convencional de Riemann. Esta integral, conocida como integral de Lebesgue, desempeña un papel fundamental en la teoría de procesos estocásticos. Para profundizar en este campo, se recomienda referirse a la obra de Resnick, S. (2019).

Un proceso estocástico consiste en una colección de variables aleatorias {X(t), t ∈ T} definidas en un espacio de probabilidad (Ω, A, P). Es importante notar que la letra t representa el índice y T denota el conjunto de índices. Esto se debe a que los procesos estocásticos, en su esencia, surgen al estudiar la evolución temporal de fenómenos aleatorios. Esta designación no presupone nada acerca de la numerabilidad de T.

Un proceso estocástico se puede entender como una función que depende de dos variables: el tiempo (representado por t) y los resultados posibles de un experimento (representados por ω). Al fijar un valor específico para ω, por ejemplo, para un ω, obtenemos una trayectoria del proceso, denotada como X(·, ω). Esta trayectoria es la representación gráfica de cómo evoluciona el proceso en el tiempo para un resultado particular del experimento. Dicha función de dos variables puede verse como una colección de variables aleatorias indexadas en el tiempo, es decir, {X(t, ω): t ∈ T, ω ∈ Ω} = {X(t): t ∈ T} y cada X(t) es (**Ω**, A, P) variable aleatoria.

Los procesos estocásticos tienen dos características importantes, la función de media y la función de autocorrelación si estos son finitos se dice que dichos procesos pertenecen al espacio $L^2(\Omega, A, P)$ Claro, aquí están las definiciones de la función media y la autocovarianza de un proceso estocástico. La función media de un proceso estocástico, denotada como μ(t), es la esperanza matemática o el valor esperado de la variable aleatoria en un tiempo específico t. Se define como μ(t) = E[X(t)], donde E[] representa el operador de esperanza o valor esperado. Esta función proporciona información sobre la tendencia central o el valor promedio del proceso en el tiempo t. Por otro lado, para realizar regiones o intervalos de confianza se usa la función de auto covarianza de un proceso estocástico que mide la covariación entre dos valores del proceso en diferentes tiempos. Se define como σ(s, t) = Cov[Xs, X(t)], donde Cov[] representa la covarianza y Xs y X(t) son dos variables aleatorias del proceso en los tiempos s y t, respectivamente. Esta medida cuantifica cómo varían conjuntamente dos instantes diferentes del proceso, proporcionando información sobre la relación de dependencia entre el proceso en diferentes puntos temporales. Hay un proceso en particular que es de mucho interés para las ecuaciones diferenciales estocásticas dicho modelo es la caminata aleatoria. Una caminata aleatoria centrada en c es un proceso estocástico discreto que describe el cambio secuencial en una variable a través de pasos sucesivos aleatorios. Sean $Y(1), \ldots, Y(n)$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuida (IID) con esperanza cero y varianza finita, se define recursivamente $\{X(t)\}$ como:

$$X(0) = c$$
$$X(n) = X(n-1) + Y(n)$$

Si se toma la partición de un intervalo [0,t] y se modela una caminata aleatoria, cuando la norma de dicha partición tiende a cero el proceso estocástico recibe el nombre de movimiento browniano (MB), y se puede demostrar que es un proceso con incrementos independientes y estacionarios, por otro lado se puede verificar que sin importar la distribución de las Y(t) si el segundo momento es finito, el proceso tiene distribuciones finito dimensionales gaussianas. El movimiento Browniano fue introducido por el botánico Brown en 1828 ver Brown, R., 1828 donde explica el movimiento de partículas sumergidas en un líquido, ahora en 1905 Einstein lo usó en la teoría de la cinética molecular. posteriormente en 1923 Wiener demuestra la existencia matemática de dicho proceso realizando la partición diádica que usó Lebesgue para construir la integral sobre los reales. La definición matemática de este proceso es:

Un movimiento Browniano estándar unidimensional es un proceso estocástico $\{B(t) : t \geq 0\}$ que cumple con las siguientes propiedades:

a) $B(0) = 0$ casi con certeza.
b) Las trayectorias $t \to B(t)(\omega)$ son continuas para todo $\omega \in \Omega$.
c) El proceso tiene incrementos independientes.
d) La variable $B(t) - B(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$ para $0 \leq s < t$.

Este proceso es fundamental ya que constituye la variable integradora en una EDE.

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una ecuación que involucra tanto términos deterministas como aleatorios.

Se define

$$dX(t) = f(t, X(t))\, dt + g(t, X(t))\, dW(t)$$

Donde:

$X(t)$ es la función desconocida que se desea encontrar.
$f(t, X(t))$ representa la derivada parcial de $X(t)$ respecto al tiempo t y la función $X(t)$.
$g(t, X(t))$ es la derivada parcial de $X(t)$ respecto a la función estocástica $W(t)$, que es un proceso de Wiener o movimiento Browniano.
dt es el diferencial determinista.
$dW(t)$ es el diferencial estocástico, que representa la variación aleatoria en el tiempo t

El movimiento Browniano geométrico es un tipo específico de proceso estocástico que se deriva del movimiento Browniano estándar. Se define mediante la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \mu\, X(t)\, dt + \sigma\, X(t)\, dW(t)$$

Donde:

$X(t)$ representa el valor del activo o proceso en el tiempo t .
μ es la tasa de crecimiento esperada.
σ es la volatilidad.
$dW(t)$ es un proceso de Wiener o movimiento Browniano, que describe la variación aleatoria en el tiempo t

La característica principal del movimiento Browniano geométrico es que el crecimiento no es lineal, sino exponencial, lo que significa que el cambio en $X(t)$ no es proporcional a $X(t)$, sino que depende también del valor actual $X(t)$. Este modelo se utiliza ampliamente en finanzas para modelar el crecimiento de activos financieros, como acciones o inversiones, donde el rendimiento se considera como una tasa de interés compuesta continua, también es usado para modelar crecimientos poblacionales y en general para modelar crecimientos exponenciales.
Otra ecuación que será de importancia en este artículo es el puente browniano cuya EDE en el intervalo [0,1] se define como:

$$dX(t) =(X(t)/(1-t))dt + dB(t)$$

Donde:

X(t) es el proceso estocástico en el tiempo t.
dB(t) es el diferencial estocástico (cambio aleatorio) en el tiempo t.
La ecuación implica una dependencia en X(t) y está definida en el intervalo de tiempo [0,1].

En las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE), al igual que en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), existe un teorema de existencia y unicidad que establece condiciones bajo las cuales una solución única existe y es única en un sentido específico.

Para EDE, la noción de unicidad y existencia se relaciona con la continuidad de las funciones involucradas, así como las propiedades de acotación y suavidad. La existencia de soluciones puede garantizarse bajo ciertas condiciones en las funciones de deriva y difusión.

Para el Puente Browniano y el Movimiento Browniano, es posible verificar que cumplen con propiedades de regularidad y suavidad. Además, en muchos casos, se puede demostrar la existencia y unicidad de soluciones para las EDE asociadas a estos procesos estocásticos. Esto se logra mediante técnicas matemáticas como la teoría de martingalas, cálculo estocástico y teoremas de existencia y unicidad adaptados para EDE específicas.

En muchos casos, encontrar soluciones analíticas para EDE puede ser extremadamente desafiante o incluso imposible. Debido a esta dificultad, se recurre a métodos numéricos para aproximarse a las soluciones y encontrar posibles trayectorias de estos procesos estocásticos. Al igual que en las EDC, donde los métodos numéricos son esenciales para obtener soluciones aproximadas en casos complejos o no lineales, en las EDE estos métodos son fundamentales. Algunos de los métodos numéricos comunes utilizados para resolver EDE incluyen: Método de Euler-Maruyama y Métodos de Runge-Kutta Estocásticos. Adaptaciones de los métodos de Runge-Kutta utilizados para resolver EDO, extendidos para manejar términos estocásticos. Estos métodos numéricos ayudan a calcular trayectorias aproximadas y proporcionan soluciones aproximadas para EDE cuando no es factible encontrar soluciones analíticas.

Demos inicio con el método de Euler Maruyama: El método de Euler-Maruyama aproxima la solución de esta EDE utilizando pasos discretos de tiempo Δt. La fórmula del método de Euler-Maruyama se expresa de la siguiente manera:

$$X(n+1) = X(n) + f(tn, Xn)\,\Delta t + g(tn, Xn)\,\Delta Wt$$

Donde:

Xn es la aproximación de la solución en el tiempo tn .
Δt es el tamaño del paso de tiempo.
ΔWt es la variación del proceso de Wiener entre los tiempos tn y t(n+1) , es decir, ΔWt = Wt(n+1) - W(tn)
{W(t)} es un movimiento browniano

El método de Euler-Maruyama es un enfoque de primer orden para aproximar soluciones de EDE y se basa en una aproximación lineal de la EDE a través de pequeños intervalos de tiempo. Si bien es sencillo de implementar, en ocasiones puede generar errores significativos en situaciones donde la EDE exhibe comportamientos no lineales o donde se requiere una alta precisión en la aproximación.

El método de Runge-Kutta Estocástico de orden dos utiliza dos etapas para calcular la aproximación de la solución en un paso de tiempo Δt. La fórmula del método de Runge-Kutta Estocástico de orden dos se puede expresar como:

$$X(n+1) = X(n) + a1*k1 + a2*k2$$

Donde:

Xn es la aproximación de la solución en el tiempo tn.
k1 y k2 son aproximaciones intermedias que se calculan de la siguiente manera:
k1 = f(tn, Xn)Δ t + g(tn, Xn) Δ Wn
k2 = f(tn + c Δ t, Xn + c k1) Δ t + g(tn + c Δ t, Xn + c k1) ΔWn
a1 y a2 son coeficientes asociados a las aproximaciones k1 y k2.
c es un parámetro en el intervalo [0,1] que determina la propagación de la solución.

Este método mejora la precisión del método de Euler al considerar una corrección en el paso intermedio utilizando la derivada en el punto medio. Aunque más complejo que el método de Euler, el método de Runge-Kutta Estocástico de orden dos proporciona una mejor aproximación para ciertas EDE que exhiben comportamientos no lineales.

RESULTADOS

En primer lugar, se llevaron a cabo 100 simulaciones del Puente Browniano con volatilidades de uno, cuatro y cero punto uno, desde el punto (1,1) al punto (10,9). Estas simulaciones se muestran en la gráfica resaltadas en color azul. Además, se estimará un intervalo de confianza del 95%. Esta región se obtiene considerando, para cada punto de la simulación, el cuantil del 2.5% y del 97.5% para las tres volatilidades mencionadas.

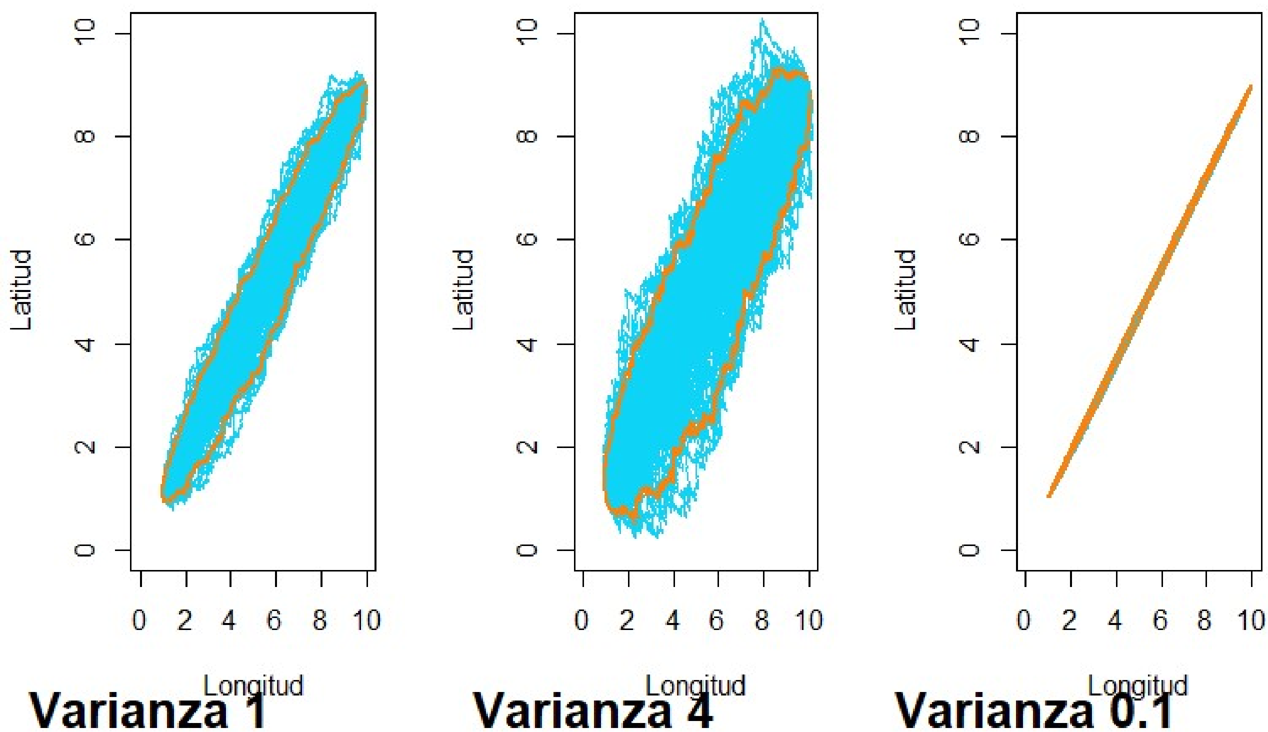

Figura 1. Simulación de Puentes Estocásticos desde (1,1) hasta (10,9) con Diferentes Parámetros de Volatilidad Utilizando Euler-Maruyama

La simulación representa un movimiento migratorio desde un punto inicial hacia otro. Se observa que cuando los individuos parten desde un punto fijo, la distancia entre ellos no es considerable. Asimismo, al acercarse al nuevo punto, la variabilidad tampoco es significativa. Por otro lado, se nota que el modelo clásico de segmento de recta muestra una menor variabilidad, lo que destaca una de las ventajas de utilizar Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDC), ya que consideran la volatilidad. En este caso, se muestran tres movimientos migratorios con la misma tendencia. Sin embargo, el Puente Browniano permite considerar la volatilidad alrededor de la trayectoria media, a diferencia del modelo clásico.

Parece que tu solicitud está incompleta al mencionar "Las simulaciones por el método de Runge Kutta de orden 2 se muestran en la Figura 2.

Se ha observado en la Figura 2 una ausencia significativa de diferencias entre ambos métodos de simulación. Esto se atribuye a la ejecución de 1000 iteraciones en cada una de las 100 simulaciones, así como a la relativa simplicidad de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE). A pesar de esto, se ha constatado que el método de Runge-Kutta de orden 2 presenta una convergencia más rápida en comparación con el método de Euler-Maruyama.

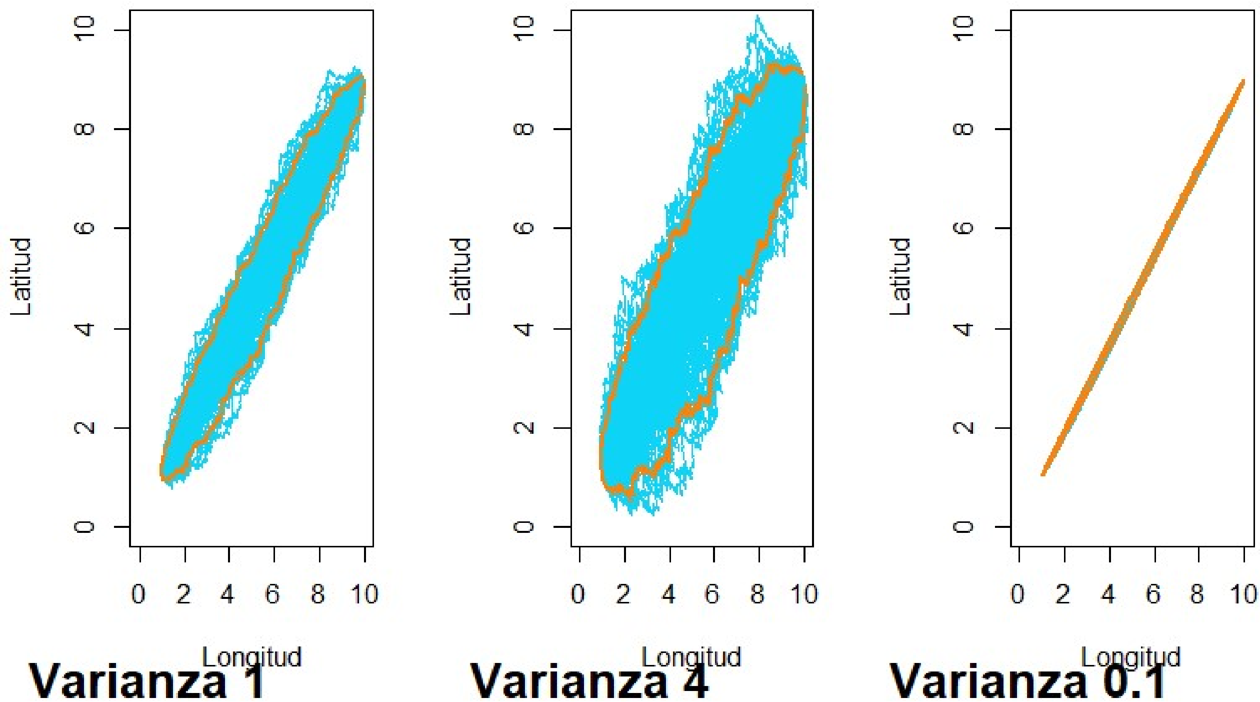

Figura 2. Simulación de Puentes Estocásticos desde (1,1) hasta (10,9) con Distintos Parámetros de Volatilidad Utilizando Runge-Kutta de Orden 2

En vista de la falta de diferencias significativas entre los dos métodos de simulación, especialmente cuando se trata de EDE 'sencillas', se ha decidido emplear el método de Euler-Maruyama para simular el Movimiento Browniano Geométrico y para calcular los límites de confianza del 95%.

Se observa en la Figura 3 que al igual que ocurre con el Puente Browniano, cuando la varianza es pequeña, el modelo tiende al clásico. Sin embargo, el Movimiento Browniano Geométrico permite modelar la volatilidad y generar regiones de confianza para la trayectoria media. Estos modelos se aplican comúnmente en el estudio de crecimientos poblacionales o en el modelado de activos financieros. No obstante, es crucial tener en cuenta que existen momentos en los que la tasa de crecimiento puede ser tanto positiva como negativa. Para una comprensión más profunda y adecuada del Movimiento Browniano Geométrico, se recomienda revisar el trabajo de Soriano, A., *et al*. 2022

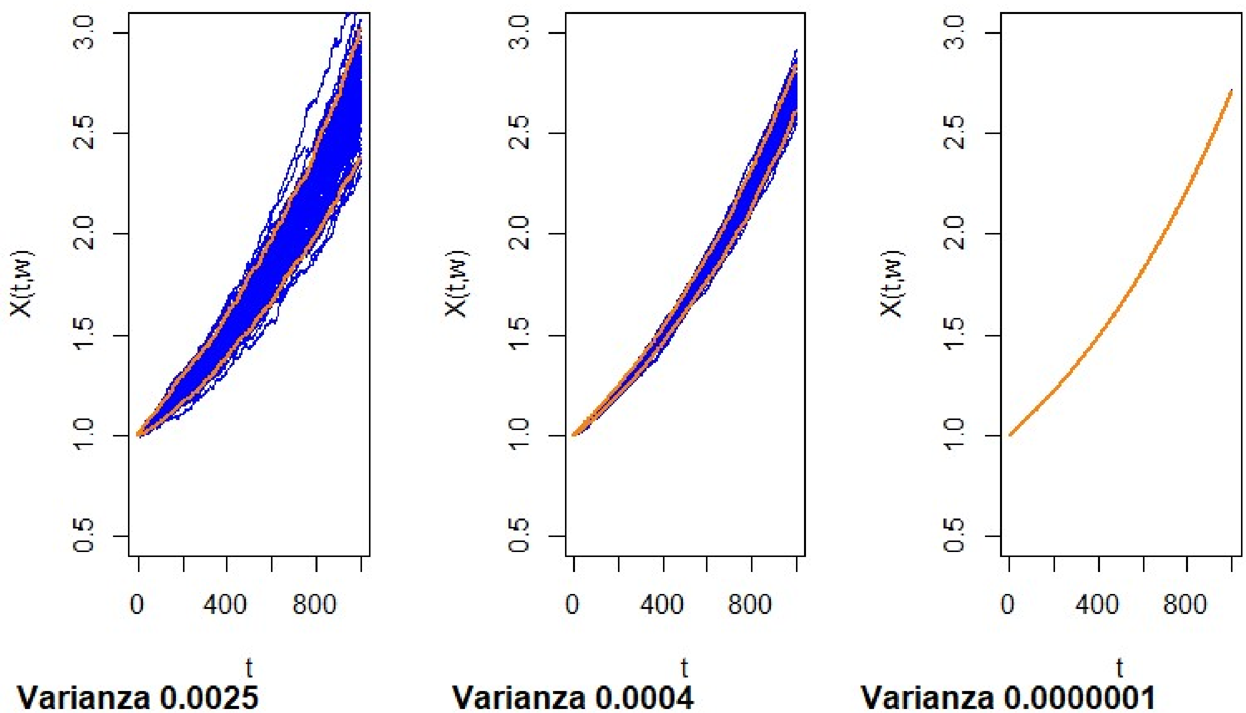

Figura 3. Simulación de Movimientos Brownianos Geométricos con Diferentes Parámetros de Volatilidad mediante el Método de Euler-Maruyama

CONCLUSIÓN

En primer lugar, se mostró que las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) son útiles para modelar la volatilidad alrededor del modelo clásico. Esta ventaja es notable ya que permite establecer regiones de confianza, lo que mejora la apreciación del modelo. También se resaltó que, al igual que en las Ecuaciones Diferenciales Clásicas (EDC), existen métodos estocásticos para simular estas EDE.

Además, se presentó la utilización de los puentes brownianos como un posible modelo para el movimiento de animales. Se destacó que cuando el parámetro de volatilidad tiende a ser pequeño, el modelo de EDE converge al modelo de EDC. Es importante señalar que este artículo solo ofrece una perspectiva sobre dos tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas. Como trabajo futuro, resulta interesante explorar otros modelos de EDE.

Para futuras investigaciones, se propone examinar el comportamiento de otras EDE y encontrar métodos adecuados que permitan estimar sus parámetros, lo que facilitaría la generación de regiones de confianza mediante simulaciones. También se sugiere incluir un análisis sobre ecuaciones diferenciales estocásticas multivariadas, describiendo las características de sus regiones de confianza y sus ventajas en comparación con sistemas de ecuaciones clásicos. Por último, se recomienda aplicar estos modelos a conjuntos de datos del mundo real, teniendo en cuenta cada supuesto y contexto específico.

Conflicto de intereses

El autor declara que no mantiene conflicto de interés que puedan afectar los resultados y conclusiones presentadas en este artículo.

REFERENCIAS

1. Kranstauber, B., Kays, R., LaPoint, S. D., Wikelski, M., & Safi, K. (2012). A dynamic Brownian bridge movement model to estimate utilization distributions for heterogeneous animal movement. *Journal of Animal Ecology*, *81*(4), 738-746.
2. Exarchos, I., & Theodorou, E. A. (2018). Stochastic optimal control via forward and backward stochastic differential equations and importance sampling. *Automatica*, *87*, 159-165.
3. Suescun D, D., Ule D, G., & Rojas A, O. (2021). Runge-Kutta implicit stochastic of order 1.5 applied to the equations of point kinetics.
4. Castañeda, L. B., Arunachalam, V., & Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to probability and stochastic processes with applications*. John Wiley & Sons.
5. Rincón, L. (2006). Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. *UNAM. México*.
6. Resnick, S. (2019). *A probability path*. Springer.
7. Brown, R. (1828). XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, *4*(21), 161-173.
8. Soriano, A., & Loro, H. (2022). Un problema en Econofísica: Predicción de activos financieros mediante el Movimiento Browniano Geométrico, dentro del mercado bursátil.